УДК 681.31

О. А. Кацюба

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ НАБЛЮДЕНИЙ ВО ВХОДНЫХ И ВЫХОДНЫХ СИГНАЛАХ

Аннотация.

Актуальность и цели. Предлагается алгоритм параметрической идентификации стохастических дискретных систем с распределенными параметрами при наличии помех наблюдений во входных и выходных сигналах в условиях априорной неопределенности (отсутствие информации о законах распределения помех наблюдений). Как известно, наиболее распространенный метод оценивания – наименьших квадратов – не применим, так как указанная задача не относится к классу регрессионных и на основе этого метода нельзя получить состоятельные оценки неизвестных параметров. Определение состоятельных оценок для обыкновенных стохастических разностных уравнений с помехами наблюдений решена автором на основе нелинейного метода наименьших квадратов ранее. Предлагаемая работа дает возможность распространить методы состоятельного оценивания параметров обыкновенных разностных уравнений на дискретные системы с распределенными параметрами.

Материалы и методы. Рассмотрено обобщение нелинейного метода наименьших квадратов на класс стохастических дискретных систем с распределенными параметрами.

Выводы. Метод может быть использован при параметрической идентификации стохастических разностных уравнений с распределенными параметрами в условиях помех наблюдений во входных и выходных сигналах.

Ключевые слова: стохастические разностные уравнения, распределенные параметры, помехи наблюдений во входных и выходных сигналах.

O. A. Katsyuba

PARAMETRIC IDENTIFICATION OF DISTRIBUTED DIFFERENCE SYSTEMS GIVEN OBSERVATION INTERFERENCES IN INPUT AND OUTPUT SIGNALS

Abstract.

Background. The article proposes an algorithm of parametric identification of a discrete stochastic system with distributed parameters in the presence of observation interferences in input and output signals in conditions of prior uncertainty (lack of information about observation interference distribution laws). It is well-known that the most routine method of estimation, the least square method, cannot be used as the stated problem doesn't refer to a regression class, and one cannot obtain consistent estimates of unknown parameters. Determination of consistent estimates for an ordinary stochastic difference equation with observation interferences was obtained by the author on the basis of the non-linear least-square method. The article gives an opportunity to apply independent estimation methods of ordinary difference equations for a discrete system with distributed constants.

Matherials and methods. The article examines generalization of the non-linear least-square method for a discrete stochastic system with distributed parameters.

Conclusions. This method can be used for parametric identification of stochastic difference equations with distributed parameters in the presence of observation interferences in input and output signals.

Key words: stochastic difference equations, distributed parameters, observation interference in input and output signals

Предлагается метод параметрической идентификации дискретных динамических систем с распределенными параметрами, описываемых стохастическим разностным уравнением при наличии помех наблюдений во входных и выходных сигналах.

Пусть имеет место линейное стохастическое разностное уравнение с распределенными параметрами, задаваемое последовательностями с бесконечным в обе стороны дискретным временем $i = ..., -1, 0, 1, ...$ и точками в пространстве: $j, k, l = ..., -1, 0, 1, ...$:

$$z_{i,j,k,l} = \sum_{m=1}^{r} b_m^{(0)} z(i-m, j,k,l) + \sum_{m_1=1}^{r_1} b_{m_1}^{(0)} z(i, j-m_1,k,l) +$$

$$+ \sum_{m_2=1}^{r_2} b_{m_2}^{(0)} z(i, j,k-m_2,l) + \sum_{m_3=1}^{r_3} b_{m_3}^{(0)} z(i, j,k,l-m_3) + a^0 x\ (i, j,k,l), \qquad (1)$$

с соответствующими начальными и краевыми условиями, где $z(i, j,k,l)$ и $x(i, j,k,l)$ – выходной и входной сигналы соответственно; $b_m^{(0)}$, $b_{m_1}^{(0)}$, $b_{m_2}^{(0)}$, $b_{m_3}^{(0)}$, a – неизвестные параметры системы.

Выходные и входные переменные наблюдаются с помехами

$$\gamma_{i,j,k,l} = z_{i,j,k,l} + \varepsilon_{i,j,k,l}^{(1)},\ w_{i,j,k,l} = x_{i,j,k,l} + \varepsilon_{i,j,k,l}^{(2)} .$$

Требуется по наблюдаемой конечной выборке последовательностей $\{\gamma_{i,j,k,l}\}$ и $\{w_{i,j,k,l}\}$ при известных порядках r, r_1, r_2, r_3 определить оценки неизвестных истинных значений параметров.

Прежде докажем следующую лемму 1.

Лемма 1. Пусть случайные процессы $\left\{\varepsilon_{i,j,k,l}^{(d)}\right\}$, $d = 1, 2,$ удовлетворяют следующим условиям:

$$E\left(\varepsilon_{i,j,k,l}^{(d)} | \overline{F}_{i,j,k,l}^{(d)}\right) = 0\,,\ E\left((\varepsilon_{i,j,k,l}^{(d)})^2 | \overline{F}_{i,j,k,l}^{(d)}\right) = c_{i,j,k,l}^{(d)} < \pi_d < \infty\,,$$

$$E\left(\left(\varepsilon_{i,j,k,l}^{(d)}\right)^4\right) < \pi'_d < \infty\,, \qquad (2)$$

где E – оператор математического ожидания; $\overline{F}_{i,j,k,l}^{(d)}$ – σ-алгебра, индуцированная семейством случайных величин;

$$\left\{\varepsilon^{(d)}(t,x,y,z),\, t\in T_i,\, x\in I_j,\, y\in K_k,\, z\in L_l\right\},$$

$$T_i=\{t; t<i,\ t\in z_c - \text{множество целых чисел}\},$$

$$I_j=\{x; x<j,\ x\in z_c - \text{множество целых чисел}\},$$

$$K_k=\{y; y<k,\ y\in z_c - \text{множество целых чисел}\},$$

$$L_l=\{z; z<l,\ z\in z_c - \text{множество целых чисел}\}.$$

Тогда

$$\frac{1}{N}\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\sum_{v=1}^{V}\varepsilon^{(d)}(i,j,k,l)\cdot\varepsilon^{(d)}(i+n_1,j+n_2,k+n_3,l+n_4)\xrightarrow[N,V\to\infty]{\text{п.н.}}0, \quad (3)$$

$$n_1,n_2,n_3,n_4\geq 1,$$

$\frac{1}{N}$ – усреднение по времени; $\frac{1}{V}$ – усреднение по пространственной области;

$$\lim_{\substack{\to\\ N,V\to\infty}}\frac{1}{N}\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\sum_{v=1}^{V}\varepsilon^{2(d)}(i,j,k,l)=\overline{\sigma}_d^2,\ \text{п.н.}, \quad (4)$$

где $\overline{\sigma}_d^2$ – средняя дисперсия.

Доказательство. Пусть имеет место последовательность следующих величин: $\left\{\tilde{\varepsilon}^{(d)}(i,j,k,l)\right\}$; причем $\tilde{\varepsilon}^{(d)}_{(i,j,k,l)}=\varepsilon^{(d)}_{(i,j,k,l)}\cdot\varepsilon^{(d)}_{(i+n_1,j+n_2,k+n_3,l+n_4)}$.

Из (1) следует [3]: $E\left(\varepsilon^{(d)}_{(i,j,k,l)}\right)=0,\ E\left(\tilde{\varepsilon}^{(d)}_{(i,j,k,l)}\right)=0$.

Далее:

$$E\left(\tilde{\xi}^{(d)}_{i,j,k,l}\,\tilde{\xi}^{(d)}_{i+\overline{n_1},j+\overline{n_2},k+\overline{n_3},l+\overline{n_4}}\right)=0,$$

$$\overline{n_1},\overline{n_2},\overline{n_3},\overline{n_4}\geq 1,\ \overline{n_1}\neq n_1,\ \overline{n_2}\neq n_2,\ \overline{n_3}\neq n_3,\ \overline{n_4}\neq n_4.$$

Применяя (1), получим $E(\xi^{(d)}_{i,j,k,l})^2=(\sigma_{i,j,k,l})^2\leq Td$. Применив свойства условных математических ожиданий [3], имеем

$$E\left(\tilde{\xi}^{(d)}_{i,j,k,l}\right)^2=E\left(\left(\xi^{(d)}_{i,j,k,l}\right)^2\cdot\left(\xi^{(d)}_{i+n_1,j+n_2,k+n_3,l+n_4}\right)^2\right)=$$

$$=E\left(\frac{E\left(\xi^{(d)}_{i,j,k,l}\right)^2\cdot\left(\xi^{(d)}_{i+n_1,j+n_2,k+n_3,l+n_4}\right)^2}{\xi^{(d)}_{i_0,j_0,k_0,l_0,}\ldots\xi^{(d)}_{i+n_1-1,j+n_2-1,k+n_3-1,l+n_4-1}}\right)=$$

$$= E\left(\frac{\left(\xi_{i,j,k,l}^{(d)}\right)^2 \cdot E\left(\xi_{i+n_1,j+n_2,k+n_3,l+n_4}^{(d)}\right)^2}{\xi_{i_0,j_0,k_0,l_0,}^{(d)} \cdots \xi_{i+n_1-1,j+n_2-1,k+n_3-1,l+n_4-l}^{(d)}} \right) \le \left(\pi^{(d)}\right)^2 . \qquad (5)$$

На основе усиленного закона больших чисел для некоррелированных случайных полей [4] из (5) следует (3). Используя дополнительное условие

$$E\left(\xi_{i,j,k,l}^{(d)}\right)^4 \le \pi'_d < \infty ,$$

докажем (4).

Пусть выполняются следующие условия:

1^0. Множество B, которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой линейной динамической системы (1), является компактом.

2^0. Случайные поля $\varepsilon_{i,j,k,l}^{(1)}$ и $\varepsilon_{i,j,k,l}^{(2)}$ независимы и удовлетворяют условиям (2).

3^0. Пусть

$$\Xi_{r,r_1,r_2,r_3,} = \left| \xi_{i,j,k,l}^{(1)} \vdots \xi_{i-1,j,k,l}^{(1)} \cdots \xi_{i-r,j,k,l}^{(1)} \vdots \ldots \vdots \xi_{i,j,k,l-1}^{(1)} \cdots \xi_{i,j,k,l-r_3}^{(1)} \vdots \xi_{i,j,k,l}^{(2)} \right|^T ,$$

$$\frac{1}{N}\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\sum_{V=1}^{V} \Xi_{r,r_1,r_2,r_3} \Xi_{r,r_1,r_2,r_3}^T \xrightarrow[N,V\to\infty]{\text{п.н.}} \begin{vmatrix} h_{\varepsilon^1}^{(0)} & \vdots & h_{\xi^{(1)}\xi^{(2)}}^T \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ h_{\xi^{(1)}\xi^{(2)}} & \vdots & H_{\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(2)}} \end{vmatrix} ,$$

где $h_{\varepsilon^{(1)}}^{(0)} \in R_{1\times 1}$, $h_{\xi^{(1)}\xi^{(2)}} = \left| h_{\varepsilon_{(1)}} \ \vdots \ h_{\varepsilon_{(2)}} \right|^T = \left| h_{\varepsilon_{(1)}} \ \vdots \ 0 \right|, h_{\xi^{(1)}} \in R_{r,r_1,r_2,r_3+1},1$,

$$H_{\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(2)}} = \begin{vmatrix} H_{\varepsilon^{(1)}} & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & H_{\varepsilon^{(2)}} \end{vmatrix}, \ H_{\varepsilon^{(1)}} \in R_{r+r_1+r_2+r_3, r+r_1+r_2+r_3}, \ H_{\varepsilon^{(2)}} \in R_{1,1}.$$

Причем $H_{\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(2)}}$ – положительно определенная матрица.

4^0. $x_{i,j,k,l}$ не зависит от

$$\left\{\varepsilon_{i,j,k,l}^{(1)} \right\}\left\{\varepsilon_{i,j,k,l}^{(2)}\right\}, E\left\{x_{i,j,k,l} x_{i-m,j-m_1 k-,m_2, l-m_3}\right\}^2 < \pi_x < \infty.$$

5^0. Входные сигналы $x_{i,j,k,l}$ и истинные значения параметров удовлетворяют условиям:

$$N^{-1}\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\sum_{V}\left(z^T \vdots x^T\right)^T \left(z^T \vdots x^T\right) \xrightarrow[N,V\to\infty]{\text{п.н.}} H = \begin{vmatrix} H_{zz} & \vdots & H_{zx} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ H_{zx}^T & \vdots & H_{xx} \end{vmatrix},$$

где H – положительно определенная матрица;

$$z = \begin{vmatrix} z_{i-1,j,k,l} \\ \vdots \\ z_{i-r,j,kl} \\ \cdots \\ \vdots \\ z_{i,j,k,l-1} \\ \vdots \\ z_{i,j,k,l-r_3} \end{vmatrix}, \ x = x_{ijkl}.$$

Представим уравнение (1) в следующем виде:

$$y_{i,j,k,l} = \varepsilon^{(1)}_{\mathrm{i,j,k,l}} + \sum_{m=1}^{r} b_m^{(0)} y_{i-m,j,k,l} + \sum_{m_1=1}^{r_1} b_{m_1}^{(0)} y_{i,j-m_1,k,l} + \sum_{m_2=1}^{r_2} b_{m_2}^{(0)} y_{i,j,k-m_2,l} +$$

$$+ \sum_{m_3=1}^{r_3} b_{m_3}^{(0)} y_{i,j,k,l-m_3} + a^{(0)} w_{i,j,k,l} - \sum_{m=1}^{r} b_m^{(0)} \varepsilon^{(1)}_{i-m,j,k,l} - \sum_{m_1=1}^{r_1} b_{m_1}^{(0)} \varepsilon^{(1)}_{i,j-m_1,k,l} -$$

$$- \sum_{m_2=1}^{r_2} b_{m_2}^{(0)} \varepsilon^{(1)}_{i,j,k-m_2,l} - \sum_{m_3=1}^{r_3} b_{m_3}^{(0)} \varepsilon^{(1)}_{i,j,k,l-m_3,l} - a^0 \varepsilon^{(2)}_{i,j,k,l}.$$

Введем обобщенную ошибку:

$$e\left(b_m^{(0)}, b_{m_1}^{(0)}, b_{m_2}^{(0)}, b_{m_3}^{(0)} \ldots a^0; _{i,j,k,l}\right) = \varepsilon^{(1)}_{i,j,k,l} - \sum_{m=1}^{r} b_m^{(0)} \varepsilon^{(1)}_{i-m,j,k,l} - \ldots a^{(0)} \varepsilon^{(2)}_{i,j,k,l}.$$

Введем обозначения:

$$\left|\frac{b}{a}\right| = \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ \cdots \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{r_1} \\ \cdots \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{r_3} \\ \cdots \\ a \end{vmatrix}; \ y_{r,r_1,r_2,r_3} = \begin{vmatrix} y_{i-1,j,k,l} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{i,j,k,l-r_3} \end{vmatrix}; \ \Xi^1_{r,r_1,r_2,r_3} = \begin{vmatrix} \xi^{(1)}_{i-1,j,k,l} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi^{(1)}_{i,j,k,l-r_3} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$y_{i,j,k,l}=\varepsilon^{(1)}_{i,j,k,l}+\left|y^{T}_{r,r_1,r_2,r_3}(i,j,k,l)\vdots w_{i,j,k,l}\right|\cdot\left|\frac{b_0}{a_0}\right|-$$

$$-\left(\Xi^{1}_{r,r_1,r_2,r_3}(i,j,k,l)\right)^{T}\cdot b_0-\xi^{(2)}_{i,j,k,l}\cdot a_0.$$

Обобщенная ошибка:

$$e\left(b^{(0)}_{m},b^{(0)}_{m_1},b^{(0)}_{m_2},b^{(0)}_{m_3}\dots a^{0};_{i,j,k,l}\right)=\varepsilon^{(1)}_{i,j,k,l}-\left(\Xi^{1}_{r,r_1,r_2,r_3}\right)^{T}\cdot b-\xi^{(2)}_{i,j,k,l}\cdot a.$$

Тогда из условия 3^0 имеем

$$\frac{1}{N}\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\vartheta=1}^{V}e^{2}\left(b^{(0)}_{m},b^{(0)}_{m_1},b^{(0)}_{m_2},b^{(0)}_{m_3}\dots a^{0};_{i,j,k,l}\right)\xrightarrow[N,V\to\infty]{\text{п.н.}}h_{\varepsilon^{(1)}}(0)+$$

$$+b^{(0)^{T}}H_{\varepsilon^{(1)}}\cdot b^{(0)}+\left(a^{(0)}\right)^{2}H_{\varepsilon^{(2)}}-2h^{T}_{\varepsilon^{(1)}}b^{(0)}=\omega\left(b^{(0)},a^{(0)}\right).$$

Определим оценку $\dfrac{\hat{b}(N,V)}{\hat{a}(N,V)}$ неизвестных истинных параметров $\left|\dfrac{b_0}{a_0}\right|$ из условия минимума суммы взвешенных квадратичных отклонений $e^{2}(b,a,i,j,k,l)$ с весом $\omega(b,a)$, т.е. из

$$\min_{\left(\frac{b}{a}\right)\epsilon B\complement R_{r+r_1+r_2+r_3+1}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{v=1}^{V}\frac{\left(y_{i,j,k,l}-\left|y^{T}_{r,r_1,r_2,r_3}(i,j,k,l)\vdots w_{i,j,k,l}\right|\left|\frac{b}{a}\right|\right)^{2}}{\omega(b,a)}. \qquad (6)$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть стационарная динамическая система с распределенными параметрами описывается уравнением (1) с нулевыми начальными и краевыми условиями и выполняются условия 1^0–5^0. Тогда оценки, определяемые выражением (6), существуют и являются сильно состоятельными оценками, т.е.

$$\left\langle\frac{\hat{b}(N,V)}{\hat{a}(N,V)}\left|\underset{\substack{N\to\infty\\V\to\infty}}{\overset{\text{п.н.}}{\to}}\right|\frac{b^{(0)}}{a^{(0)}}\right\rangle.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию:

$$\frac{1}{N}\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\sum_{v=1}^{V}\left(y_{i,j,k,l}-\left|y^{T}_{r,r_1,r_2,r_3}(i,j,k,l)\vdots w_{i,j,k,l}\right|\left|\frac{b}{a}\right|\right)^{2}=\frac{1}{N}\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\sum_{v=1}^{V}\left(z_{i,j,k,l}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{(1)}_{i,j,k,l}-\left|z^{T}_{r,r_1,r_2,r_3}(i,j,k,l)+\Xi^{(1)^{T}}_{r,r_1,r_2,r_3}(i,j,k,l)\vdots x_{i,j,k,l}+\varepsilon^{(2)}_{i,j,k,l}\right|\left|\frac{b}{a}\right|\right)^{2}=$$

$$=\frac{1}{N}\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\sum_{v=1}^{V}\Big(\varepsilon_{i,j,k,l}^{(1)}+z_{r,r_1,r_2,r_3}^{T}(i,j,k,l)\big|b_0\big|\Big)+x_{i,j,k,l}a_0-$$

$$-\left|z_{r,r_1,r_2,r_3}^{T}(i,j,k,l)+\Xi_{r,r_1,r_2,r_3}^{(1)^T}(i,j,k,l)-\left|x_{i,j,k,l}+\varepsilon_{i,j,k,l}^{(2)}\right|\left|\frac{b}{a}\right|\right)^2=$$

$$=\frac{1}{N}\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\sum_{v=1}^{V}(\xi_{i,j,k,l}^{(1)}+z_{r,r_1,r_2,r_3}^{T}(i,j,k,l)\tilde{b}-x_{i,j,k,l}\tilde{a}-\Xi_{r,r_1,r_2,r_3}^{(1)^T}(i,j,k,l)b-$$

$$-\varepsilon_{i,j,k,l}^{(2)}a)^2=v_1+v_2+v_3,\ \tilde{b}=b-b^{(0)};\tilde{a}=a-a^{(0)},$$

$$\vartheta_1=\frac{1}{N}\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\sum_{v=1}^{V}(\xi_{i,j,k,l}^{(1)})^2+b^T\Xi_{r,r_1,r_2,r_3}^{1}\left(\Xi_{r,r_1,r_2,r_3}^{1}\right)^T b+(\varepsilon_{i,j,k,l}^{(2)})^2a^2+$$

$$+2b^T\Xi_{r,r_1,r_2,r_3}^{1}\cdot(\xi_{i,j,k,l}^{(2)}a)-2\xi_{i,j,k,l}^{(1)}\left(\Xi_{r,r_1,r_2,r_3}^{`}\right)^T b-2\xi_{i,j,k,l}^{(1)}\xi_{i,j,k,l}^{(2)}a),$$

$$\vartheta_2=2\frac{1}{N}\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\sum_{v=1}^{V}\left|\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right|^T\left|z_{r,r_1,r_2,r_3}^{T}\vdots x_{i,j,k,l}\right|^T\left|z_{r,r_1,r_2,r_3}^{T}\vdots x_{i,j,k,l}\right|\left|\frac{b}{a}\right|,$$

$$\vartheta_3=2\frac{1}{N}\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\sum_{v=1}^{V}\Big(-\xi_{i,j,k,l}^{(1)}\cdot z_{r,r_1,r_2,r_3}^{T}\tilde{b}-\xi_{i,j,k,l}^{(1)}x_{i,j,k,l}\tilde{a}+b^T\Xi_{r,r_1,r_2,r_3}^{1}\cdot z_{r,r_1,r_2,r_3}^{T}\tilde{b}+$$

$$+b^T\Xi_{r,r_1,r_2,r_3}^{1}x_{i,j,k,l}\tilde{a}+a\varepsilon_{i,j,k,l}^{(2)}z_{r,r_1,r_2,r_3}^{T}\tilde{b}+a\xi_{i,j,k,l}^{(2)}x_{i,j,k,l}\tilde{a}\Big).$$

Тогда из условия 3^0 и леммы 1 получим

$$\vartheta_1\underset{N,V\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}}.h_{\xi^{(1)}}(0)+b^TH_{\xi^{(1)}}b+a^2h_{\xi^{(2)}}-2h_{\xi^{(1)}}^{T}b.$$

Из условия 5^0 имеем

$$\vartheta_2\underset{N,V\to\infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}}.\left|\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right|^T H\left|\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right|,$$

получим:

$$b^T\Xi_{r,r_1,r_2,r_3}^{1}\cdot z_{r,r_1,r_2,r_3}^{T}\cdot\tilde{b}=b^T\begin{pmatrix}\xi_{i-1,j,k,l}^{(1)}z_{i-1,j,k,l} & \cdots & \xi_{i-1,j,k,l}^{(1)}z_{i,j,k,l-r_3}\\ & \vdots & \\ \xi_{i,j,k,l-r_3}^{(1)}z_{i-1,j,k,l} & \cdots & \xi_{i,j,k,l-r_3}^{(1)}z_{i,j,k,l-r_3}\end{pmatrix}\tilde{b}\quad,(7)$$

таким образом, (7) может быть представлена в виде $(r+r_1+r_2+r_3)^2$ слагаемых.

Рассмотрим слагаемое: из 2^0, 4^0 следует, что

$$\frac{1}{N}\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\vartheta=1}^{V} z_{i-m,j-m_1,k-m_2,l-m_3}\cdot\xi^{(1)}_{i-m^{`},j-m_1^{`},k-m_2^{`},l-m_3^{`}} \xrightarrow[N,V\to\infty]{\text{п.н.}} 0.$$

Аналогично все остальные слагаемые в ϑ_3 сходятся к нулю при $N,V\to\infty$.

Справедливо, $\vartheta_3 \xrightarrow[N,V\to\infty]{\text{п.н.}} 0$, $\forall\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\in B$, и тогда

$$\frac{1}{N}\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\vartheta=1}^{V}(y_{i,j,k,l}-\left|y^{T}_{r,r_1,r_2,r_3}(i,j,k,l)\vdots w_{i,j,k,l}\right|\left|\frac{b}{a}\right|)^2 \xrightarrow[N,V\to\infty]{\text{п.н.}} h_{\xi^{(1)}}(0)+$$

$$+b^T H_{\xi^{(1)}}b+a^2 h_{\xi^{(2)}}-2h^T_{\xi^{(1)}}b+\begin{pmatrix} \tilde{b} \\ a \end{pmatrix}^T H\begin{pmatrix} \tilde{b} \\ a \end{pmatrix}=\overline{U}(b,a). \qquad (8)$$

Докажем, что решение задачи (8) $\min\dfrac{\overline{U}(b,a)}{\omega(b,a)},\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\in B$ существует и достигается в единственной точке $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$.

Введем вспомогательную функцию:

$$V(b,a,\theta)=\overline{U}(b,a)-\theta\omega(b,a)=$$

$$=(1-\theta)h_{\xi^{(1)}}(0)+\begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}^T H\begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^T\left|\begin{matrix} H_{zz}+(1-\theta)H_{\xi^{(1)}} & \vdots & H_{zx} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ H^T_{zx} & \vdots & H_{xx}+(1-\theta)H_{\xi^{(2)}} \end{matrix}\right|\cdot\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}-$$

$$-2\left|\frac{H_{zz}b_0+H_{zx}a_0+(1-\theta)h_{\xi^{(1)}}}{H^T_{zx}b_0+H_{xx}a_0}\right|^T\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix},\ \ \theta\in R_1 .$$

Дифференцируя $V(b,a,\theta)$ по b,a и приравнивая полученное выражение к нулю, имеем

$$\frac{b(\theta)}{a(\theta)}=\left|\begin{matrix} H_{zz}+(1-\theta)H_{\xi^{(1)}} & \vdots & H_{zx} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ H^T_{zx} & \vdots & h_{xx}+(1-\theta)h_{\xi^{(2)}} \end{matrix}\right|^{-1}\cdot\left|\frac{H_{zz}b_0+h_{zx}a_0+(1-\theta)h_{\xi^{(1)}}}{H^T_{zx}b_0+H_{xx}a_0}\right|.$$

Тогда

$$V(\theta)=(1-\theta)h_{\xi(1)}(0)+\left(\frac{b_0}{a}\right)^T H\left(\frac{b_0}{a}\right)-\left|\frac{H_{zz}b_0+H_{zx}a_0+(1-\theta)h_{\xi(1)}}{H_{zx}^T b_0+H_{xx}a_0}\right|^T\times$$

$$\times\begin{vmatrix} H_{zz}+(1-\theta)H_{\xi(1)} & \vdots & H_{zx} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ H_{zx}^T & \vdots & H_{xx}+(1-\theta)H_{\xi(2)} \end{vmatrix}^{-1}\cdot\left|\frac{H_{zz}b_0+H_{zx}a_0+(1-\theta)h_{\xi(1)}}{H_{zx}^T b_0+H_{xx}a_0}\right|.$$

Функция $V(\theta)$ на интервале $(-\infty,\lambda_{\min}+1)$ непрерывна, где $\lambda_{\min}$ – наименьшее собственное число регулярного пучка квадратичных форм [5] на основе положительно определенных матриц:

$$H \text{ и } H_{\xi(1)\xi(2)}\text{, причем } \lambda_{\min}>0 .$$

Определим производную

$$\frac{dV}{d\theta}=\left[\begin{vmatrix} -1 \\ \cdots \\ \dfrac{b}{a} \end{vmatrix}^T \begin{vmatrix} h_{\xi(1)}(0) & \vdots & h_{\xi(1)}^T \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ h_{\xi(1)} & \vdots & H_{\xi(1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ \cdots \\ \dfrac{b}{a} \end{vmatrix}\right],$$

где матрица

$$\begin{vmatrix} h_{\xi(1)}(0) & \vdots & h_{\xi(1)}^T \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ h_{\xi(1)} & \vdots & H_{\xi(1)} \end{vmatrix} -$$

положительно определена и, следовательно

$$\frac{dV}{d\theta}<0\,\forall\,\theta\in(-\infty,\lambda_{\min}+1),$$

откуда следует, что уравнение $V(\theta)=0$ на интервале $(-\infty,\lambda_{\min}+1)$ имеет не более одного корня.

Легко показать, что этим корнем является $\theta=1$, что доказывает существование и единственность (8).

Выражение (6) можно привести к следующему виду:

$$\text{пусть } Y=\left(y_{1111}\cdots y_{N,N_1,N_2,N_3}\right)^T,$$

$$A_{Y,w}=\begin{vmatrix} y_{0111}\cdots y_{111,1-r_3} & \vdots & w_{1111} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{N-1,N_1,N_2,N_3}\cdots y_{N,N_1,N_2,N_3-r_3} & \vdots & w_{N,N_1,N_2,N_3} \end{vmatrix}.$$

Введя новый вектор переменных $\left|-1 \vdots b \vdots a\right|^{T} = u$ и матрицу $\overline{A_{Y,w}} = \left|+y \vdots A_{Y,w}\right|$, имеем для (6):

$$\min_{u \in B} \frac{u^{T} \overline{A}_{Y,w}^{T} \overline{A}_{Y,w} \vartheta}{u^{T} D u}, \text{ где } D = \begin{vmatrix} h_{\xi(1)}(0) & \vdots & h_{\xi(1)}^{T} \vdots 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \begin{vmatrix} h_{\xi(1)} \\ 0 \end{vmatrix} & \vdots & H_{\xi(1)\xi(2)} \end{vmatrix}$$

при $\overline{A}_{Y,w}^{T} \overline{A}_{Y,w} > 0$ [6].

Определим $\underset{N,V}{\mathrm{V}}(\theta)$ для конечной выборки:

$$\underset{N,V}{\mathrm{V}}(\theta, a, b) = U(b, a) - \theta\omega(b, a) = \left(Y - A_{Y,w} \left(\frac{b}{a} \right) \right)^{T} \left(Y - A_{Y,w} \left(\frac{b}{a} \right) \right) -$$

$$- \theta(h_{\xi(1)}(0) + b^{T} H_{\xi(1)} b + a^{2} H_{\xi(2)} - 2 h_{\xi(1)}^{T} b \Big).$$

Продифференцируем по $\left|\frac{b}{a}\right|$ и определим $\left|\frac{b}{a}\right|$:

$$\left|\frac{b}{a}\right| = \begin{vmatrix} A_{Y}^{T} A_{Y} - \theta H_{\xi(1)} & \vdots & A_{Y}^{T} A_{w} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ A_{w}^{T} A_{Y} & \vdots & A_{w}^{T} A_{w} - H_{\xi(2)} \end{vmatrix}^{-1} \cdot \left| \frac{A_{Y}^{T} Y - \theta h_{\xi(1)}}{A_{w}^{T} Y} \right|, \tag{9}$$

и

$$\underset{N,V}{\mathrm{V}}(\theta) = Y^{T} Y - \theta h_{\xi_1}(0) -$$

$$- \left| \frac{A_{Y}^{T} Y - \theta h_{\xi(1)}}{A_{w}^{T} Y} \right|^{T} \begin{vmatrix} A_{Y}^{T} A_{Y} - \theta H_{\xi(1)} & \vdots & A_{Y}^{T} A_{w} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ A_{w}^{T} A_{Y} & \vdots & A_{w}^{T} A_{w} - H_{\xi(2)} \end{vmatrix}^{-1} \left| \frac{A_{Y}^{T} Y - h_{\xi(1)}}{A_{w}^{T} Y} \right|,$$

$\underset{N,V}{\mathrm{V}}(\theta)$ имеет свойства, аналогично $V(\theta) = 0$, корень $\hat{\theta}_{(N)}$ – наименьший положительный корень пучка квадратичных форм, т.е.

$$\det \left\{ \begin{vmatrix} A_{Y}^{T} A_{Y} & \vdots & A_{Y}^{T} A_{w} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ A_{w}^{T} A_{Y} & \vdots & A_{w}^{T} A_{w} \end{vmatrix} - \theta \begin{vmatrix} H_{\xi(1)} & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0^{T} & \vdots & H_{\xi(2)} \end{vmatrix} \right\} = 0.$$

Нахождение корня $\underset{N,V}{\mathrm{V}}(\theta)=0$ можно записать в следующей форме:

$$\hat{\theta}(N,V)=\lambda_{\min}(N,V)\left[\overline{A}_{Y,w}^{T}A_{Y,w}(D)^{-1}\right].$$

Если $D\geq 0$, то [5]:

$$\lambda_{\min}(N,V)\left[\overline{A}_{Y,w}^{T}\overline{A}_{Y,w}-\theta D\right]=\frac{1}{\lambda_{\max}(N,V)\left[\left(\overline{A}_{Y,w}^{T}\overline{A}_{Y,w}\right)^{-1}D\right]}.$$

Известно [6], что

$$\frac{1}{N}\frac{1}{V}\frac{1}{\lambda_{\min}(N,V)\left[\left(\overline{A}_{Y,w}^{T}\overline{A}_{Y,w}\right)^{-1}D\right]}\xrightarrow[N,V\to\infty]{\text{п.н.}}$$

$$\xrightarrow[N,V\to\infty]{\text{п.н.}}\frac{1}{\lambda_{\max}\left[\lim\limits_{\substack{N\to\infty\\ V\to\infty}}\frac{1}{N}\frac{1}{V}\left(\overline{A}_{Y,w}^{T}\overline{A}_{Y,w}\right)^{-1}D\right]}=$$

$$=\lambda_{\min}\left[\left(\lim\limits_{\substack{N\to\infty\\ V\to\infty}}\frac{1}{N}\frac{1}{V}\overline{A}_{Y,w}^{T}\overline{A}_{Y,w}\right)D^{-1}\right].$$

Но

$$\lambda_{\min}\left[\left(\lim\limits_{\substack{N\to\infty\\ V\to\infty}}\frac{1}{N}\frac{1}{V}\overline{A}_{Y,w}^{T}\overline{A}_{Y,w}\right)D^{-1}\right]$$

есть решение уравнения $V(\theta)=0$, отсюда $\frac{1}{N}\hat{\theta}(N,V)\xrightarrow[N,V\to\infty]{\text{п.н.}}\theta$.

Неизвестные параметры определим из решения систем линейных уравнений (9), тогда, очевидно, получаем:

$$\frac{1}{N}\frac{1}{V}\begin{vmatrix}A_Y^TA_Y-\hat{\theta}(N,V)H_{\xi^{(1)}} & \vdots & A_Y^TA_w\\ \dots & \vdots & \dots\\ A_w^TA_Y & \vdots & A_w^TA_w-H_{\xi^{(2)}}\end{vmatrix}\begin{pmatrix}b\\ a\end{pmatrix}-$$

$$-\frac{1}{N}\frac{1}{V}\left(\left\|\frac{A_Y^TY-\hat{\theta}(N,V)h_{\xi^{(1)}}}{A_w^TA_Y}\right\|\right)\xrightarrow[N,V\to\infty]{\text{п.н.}}$$

$$\xrightarrow[N,V\to\infty]{\text{п.н.}} \begin{vmatrix} H_{zz}+\left(1-\hat{\theta}\right)H_{\xi(1)} & \vdots & H_{zx} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ H_{zx}^{T} & \vdots & H_{xx}+\left(1-\hat{\theta}\right)H_{\xi(2)} \end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \dfrac{b}{a} \end{pmatrix}-\left|\frac{H_{zz}b_0+H_{zx}a_0+h_{\xi(1)}\left(\hat{\theta}-1\right)}{H_{zx}^{T}b_0+H_{xx}a_0}\right|=0$$

из единственности (10) и $V\left(\theta\right)=0$ и следует [7], что $\dfrac{\hat{b}(N,V)}{\hat{a}(N,V)}\xrightarrow[N,V\to\infty]{\text{п.н.}}\begin{pmatrix}\dfrac{b_0}{a_0}\end{pmatrix}$.

Список литературы

1. **Кацюба, О. А.** Особенности применения МНК для оценивания линейных разностных операторов в задачах идентификации объектов управления / О. А. Кацюба, А. И. Жданов // Автоматика и телемеханика. – 1979. – № 8. – С. 86–90.
2. **Кацюба, О. А.** Идентификация методов наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии с аддитивным ошибками измерений / О. А. Кацюба, А. И. Жданов // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 2. – С. 29–38.
3. **Рытов, С. М.** Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2. Случайные поля / С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский. – М. : Наука, Гл. ред. физматгиз, 1978. – 356 с.
4. **Дуб, Д.** Вероятностные процессы / Д. Дуб. – М. : Иностранная литература, 1956. – 605 с.
5. **Гантмахер, Ф. Р.** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : ГИФМЛ, 1967. – 575 с.
6. **Stoica, P.** Bias correction in least-Sguares identificstion / P. Stoica, T. Soderstrome // Int. I. Control. – 1982. – Vol. 35, № 3.
7. **Unton, F.** Recursive Estimator of the Solutions of Linear Equation Seguence / F. Unton // IEEE Trans. Aut. Control. – 1984. – Vol. AC-29, № 2. – P.177–179.

References

1. Katsyuba O. A., Zhdanov A. I. *Avtomatika i telemekhanika* [Automatic equipment and telemechanics]. 1979, no. 8, pp. 86–90.
2. Katsyuba O. A., Zhdanov A. I. *Avtomatika i telemekhanika* [Automatic equipment and telemechanics]. 1982, no. 2, pp. 29–38.
3. Rytov S. M., Kravtsov Yu. A., Tatarskiy V. I. *Vvedenie v statisticheskuyu radiofiziku. Ch. 2. Sluchaynye polya* [Introduction into statistic radio physics; part 2, random fields]. Moscow: Nauka, Gl. red. fizmatgiz., 1978, 356 p.
4. Dub D. *Veroyatnostnye protsessy* [Stochastic processes]. Moscow: Inostrannaya literatura, 1956, 605 p.
5. Gantmakher F. R. *Teoriya matrits* [Theory of matrixes]. Moscow: GIFML, 1967, 575 p.
6. Stoica P., Soderstrome T. *Int. I. Control*. 1982, vol. 35, no. 3.
7. Unton F. *IEEE Trans. Aut. Control*. 1984, vol. AC-29, no. 2, pp. 177–179.

Кацюба Олег Алексеевич
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой мехатроники в автоматизированных производствах, Самарский государственный университет путей сообщения (Россия, г. Самара, ул. Свободы, 2в)

E-mail: map@samgups.ru

Katsyuba Oleg Alekseevich
Doctor of engineering sciences, professor, head of sub-department of mechatronics in automatic production, Samara State Transport University (2в Svobody street, Samara, Russia)

УДК 681.31

Кацюба, О. А.

Параметрическая идентификация распределенных разностных систем при наличии помех наблюдений во входных и выходных сигналах / О. А. Кацюба // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2016. – № 1 (37). – С. 50–62.